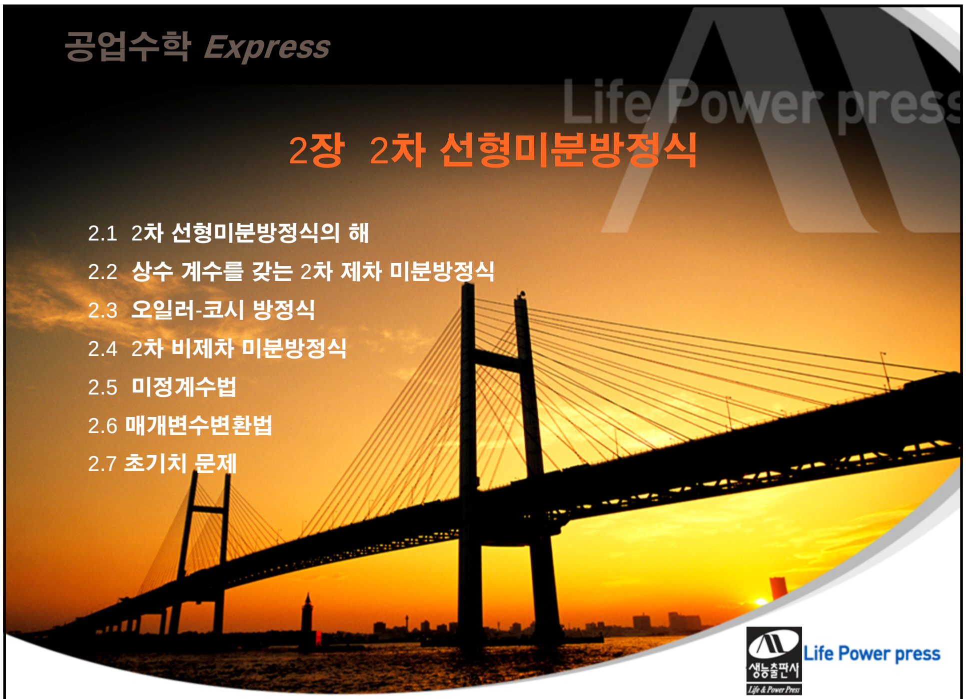


2.1 2차 선형미분방정식의 해

$$\underbrace{y'' + p(x)y' + q(x)y}_{} = u(x) \longrightarrow \begin{cases} u(x) = 0 & : \text{제차 선형미분방정식} \\ u(x) \neq 0 & : \text{비제차 선형미분방정식} \end{cases}$$

($p(x)$, $q(x)$: 계수)

(1) 제차 미분방정식의 선형성

① y_1과 y_2가 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 의 해라면

$\longrightarrow$ $y_1 + y_2$ 도 해가 된다.

$$\because \quad (y_1 + y_2)'' + p(x)(y_1 + y_2)' + q(x)(y_1 + y_2)$$

$$= \underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{0} + \underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{0} = 0$$

② y_1이 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 의 해라면

$\longrightarrow$ cy_1 (c는 상수)도 해가 된다.

$$\because \quad (cy_1)'' + p(x)(cy_1)' + q(x)(cy_1) = c\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{0} = 0$$

①과 ②를 통합하면

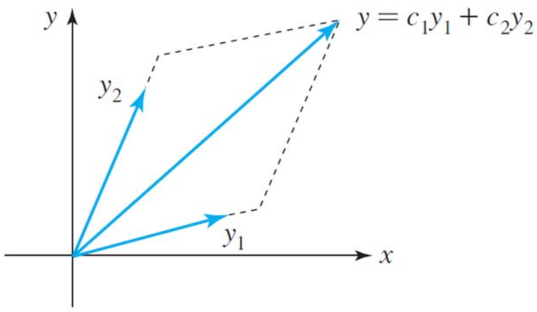
③ y_1과 y_2가 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$의 해라면

$\longrightarrow$ $c_1y_1+c_2y_2$도 해가 된다.(중첩의 원리)

(2) 제차 미분방정식의 일반해

일반해 $y=c_1y_1+c_2y_2$

$\longrightarrow$ y_1과 y_2의 선형결합으로 이루어지며, c_1과 c_2의 선택에 따라 무수히 많은 해가 존재한다.
(벡터공간구성)



[그림 2.1] 2차 제차미분방정식의 해의 개념

2.2 상수계수를 가지는 2차 제차미분방정식

$$y''+ay'+by=0$$ (a, b는 임의의 상수)

해의 형태 가정: $y \triangleq e^{\lambda x}$, λ는 상수

$y=e^{\lambda x}$가 $y''+ay'+by=0$의 해가 되기 위해서는 다음 관계가 성립해야 한다.

$$y'=\lambda e^{\lambda x},\ y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x}+a\lambda e^{\lambda x}+be^{\lambda x}=0$$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2+a\lambda+b)=0$$

$$\therefore \lambda^2+a\lambda+b=0 \longleftarrow \text{특성 방정식}$$

특성방정식의 두 개의 해를 λ_1, λ_2라 가정하면

$$y_1=e^{\lambda_1 x},\quad y_2=e^{\lambda_2 x}$$

는 각각 해가 되므로 중첩의 원리에 의해 일반해는 다음과 같다.

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$$

특성방정식은 2차 방정식이므로 판별식에 따라 해의 종류가 다르다.

① $a^2 - 4ac > 0$이면 서로 다른 두 실근 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

② $a^2 - 4ac = 0$이면 중근 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^*$

③ $a^2 - 4ac < 0$이면 공액복소근 $\lambda_1 = p + iq,\ \lambda_2 = p - iq$

(1) 특성방정식이 서로 다른 두 실근을 가지는 경우

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \longrightarrow$ 서로 다른 두 실근 $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$y_1 = e^{\lambda_1 x}$ 와 $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ 는 실함수로 각각 해가 된다.

$$\therefore\ y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

<예제> $y'' + 4y' + 3y = 0$

특성방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0,\ (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$

$\therefore\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3$ (서로 다른 두 실근)

일반해 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$

(2) 특성방정식이 중근을 가지는 경우

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \longrightarrow$ 중근 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$

$y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ 는 하나의 해가 된다.

또 다른 해 y_2를 결정하는 방법 $\longrightarrow$ 차수감소법(Reduction of Order)

$$y'' + ay' + by = 0$$

y_1을 한 해라고 가정하고 y_2를 다음과 같이 가정

$y_2 = u(x)y_1(x)$, $u(x)$는 임의의 함수

$\longrightarrow$ y_2가 또 다른 해가 되도록 함수 $u(x)$를 결정!

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

$$y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$$

$\longrightarrow$ $y_2,\ y_2',\ y_2''$을 $y'' + ay' + by = 0$에 대입하여 $u'',\ u',\ u$에 대해 정리

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) + u\underbrace{(y_1'' + ay_1' + by_1)}_{0} = 0$$

$$u''y_1 + u'(2y_1' + ay_1) = 0$$

$$\Big\downarrow u' \triangleq w \text{ 치환}$$

$$w' + \left(\frac{2y_1' + ay_1}{y_1}\right)w = 0$$

$$\Big\downarrow \text{변수 분리}$$

$$\frac{dw}{w} = \left(-\frac{2y_1'}{y_1} - a\right)dx$$

$$\Big\downarrow \text{적분}$$

$$\ln|w| = -2\ln|y_1| - \int a dx$$

$$\therefore w = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a dx}$$

$$\Big\downarrow w = u' \text{ 관계}$$

$$y_2 = uy_1 = y_1\int w dx = xy_1$$

∴ 특성방정식이 중근을 가지는 경우 $y_1 = e^{-\frac{a}{2}x}$ 이고 $y_2 = xe^{-\frac{a}{2}x}$ 가 된다.

(x가 한번 곱해진다)

2.2 상수계수를 가지는 2차 제차미분방정식

<예제> $y'' + 4y' + 4y = 0$

특성방정식 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda + 2)^2 = 0 \quad \therefore \lambda_1 = \lambda_2 = -2$ (중근)

일반해 $y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$

(3) 특성방정식이 복소근을 가지는 경우

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \longrightarrow \text{복소근 } \lambda_1 = p + iq,\ \lambda_2 = p - iq$$

두 개의 근

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(p+iq)x} = e^{px}\cdot e^{iqx} = e^{px}(\cos qx + i\sin qx)$$

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(p-iq)x} = e^{px}\cdot e^{-iqx} = e^{px}(\cos qx - i\sin qx)$$

y_1과 y_2가 해이므로 중첩의 원리에 의해 y_3와 y_4도 해가 된다.

쉽게 가르치고 배우는 공업수학 생능출판사

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{px}\cos qx$$

$$y_4 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{px}\sin qx$$

∴ 일반해 $y = c_1 y_3 + c_2 y_4 = e^{px}(c_1\cos qx + c_2\sin qx)$

<예제> $y'' + y' + y = 0$

특성방정식 $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \left(p = -\frac{1}{2},\ q = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

일반해 $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

<특성근의 종류에 따른 일반해>

특성 방정식의 근	해의 기저	일반해
서로 다른 실근 λ_1, λ_2	$e^{\lambda_1 x}$ $e^{\lambda_2 x}$	$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
중근 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}a$	$e^{-\frac{1}{2}ax}$ $xe^{-\frac{1}{2}ax}$	$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}ax} + c_2 xe^{-\frac{1}{2}ax}$
공액 복소근 $\lambda_1 = p + iq$ $\lambda_2 = p - iq$	$e^{px}\cos qx$ $e^{px}\sin qx$	$y = e^{px}(c_1\cos qx + c_2\sin qx)$

2.3 오일러-코시 방정식

상수계수를 가지지 않는 2차 제차방정식의 일반해를 구하는 과정은 매우 어렵다. $\longrightarrow$ 특별한 형태의 오일러-코시(Euler-Cauchy) 미분방정식의 해는 쉽게 구할 수 있다.

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$ (a, b는 상수)

해의 형태 가정; $y \triangleq x^m$ (m은 상수)

$$y' = mx^{m-1},\ y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$\big\downarrow$ 대입

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0$$

$$x^m\{m^2 + (a-1)m + b\} = 0$$

$$\therefore\ m^2 + (a-1)m + b = 0 \longleftarrow$$ 특성방정식(2차 방정식)

특성방정식의 두 개의 근 m_1, m_2

일반해 $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지는 경우

$m^2 + (a-1)m + b = 0 \longrightarrow$ 서로 다른 두 실근 $(m_1 \mp m_2)$

$y_1 = x^{m_1}$과 $y_2 = x^{m_2}$ 은 실함수로 각각 해가 된다.

$\therefore$ 일반해 $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$

<예제> $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$

특성방정식 $m^2 - 5m + 6 = (m-2)(m-3) = 0$

$m_1 = 2,\ m_2 = 3$ (서로 다른 두 실근)

일반해 $y = c_1 x^2 + c_2 x^3$

(2) 중근을 가지는 경우

$m^2 + (a-1)m + b = 0 \longrightarrow$ 중근 $\left(m_1 = m_2 = \dfrac{1-a}{2}\right)$

$y_1 = x^{\frac{1-a}{2}}$ 는 하나의 해가 된다.

또 다른 해 y_2를 결정하는 방법 $\longrightarrow$ 차수감소법(Reduction of Order)

$$y_2 = u(x)\,y_1(x) \longrightarrow x^2y'' + axy' + by = 0 \longleftarrow \begin{cases} y_2' = u'y_1 + uy_1' \\ y_2'' = u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1'' \end{cases}$$

$$u''x^2y_1 + u'x\underbrace{(2xy_1' + ay_1)}_{y_1} + u\underbrace{(x^2y_1'' + axy_1' + by_1)}_{0} = 0$$

$$\therefore\ u''x^2y_1 + u'xy_1 = 0$$

$$\longrightarrow u''x^2 + u'x = 0$$

↓ 변수 분리

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{1}{x}$$

↓ 양변 적분

$$\int \frac{u''}{u'}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|u'| = -\ln x \longrightarrow u' = \frac{1}{x} \qquad \therefore u = \ln x$$

$$\therefore\ y_2 = uy_1 = y_1 \ln x$$

<예제> $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

특성방정식 $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0,\quad m_1 = m_2 = 2$

일반해 $y = c_1x^2 + c_2x^2 \underline{\ln x}$

(3) 공액복소근을 가지는 경우

$m^2 + (a-1)m + b = 0 \longrightarrow$ 복소근 $m_1 = p + iq,\ m_2 = p - iq$

두 개의 근 $y_1 = x^{m_1} = x^{p+iq} = x^p \cdot x^{iq} = x^p \cdot e^{iq\ln x}$

$$= x^p\{\cos(q\ln x) + i\sin(q\ln x)\}$$

$$y_2 = x^{m_2} = x^{p-iq} = x^p \cdot x^{-iq} = x^p \cdot e^{-iq\ln x}$$

$$= x^p\{\cos(q\ln x) - i\sin(q\ln x)\}$$

y_1과 y_2가 해이므로 중첩의 원리에 의해 y_3와 y_4도 해가 된다.

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = x^p\cos(q\ln x)$$

$$y_4 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = x^p\sin(q\ln x)$$

$\therefore$ 일반해 $y = c_1y_3 + c_2y_4 = x^p\{c_1\cos(q\ln x) + c_2\sin(q\ln x)\}$

<예제> $x^2y''+7xy'+13y=0$

특성방정식 $m^2+6m+13=0$

$\longrightarrow\ m_1=-3+2i,\ m_2=-3-2i$

일반해 $y=x^{-3}\{c_1\cos 2\ln x+c_2\sin 2\ln x\}$

<특성근의 종류에 따른 일반해>

보조방정식의 근	해의 기저	일반해
서로 다른 실근 m_1, m_2	x^{m_1} x^{m_2}	$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$
중근 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1-a}{2}$	$x^{\frac{1-a}{2}}$ $(\ln x)x^{\frac{1-a}{2}}$	$y=c_1x^{\frac{1-a}{2}}+c_2(\ln x)x^{\frac{1-a}{2}}$
공액 복소근 $m_1=p+iq$ $m_2=p-iq$	$x^p\cos(q\ln x)$ $x^p\sin(q\ln x)$	$y=x^p\{c_1\cos(q\ln x)+c_2\sin(q\ln x)\}$

2.4 2차 비제차 미분방정식

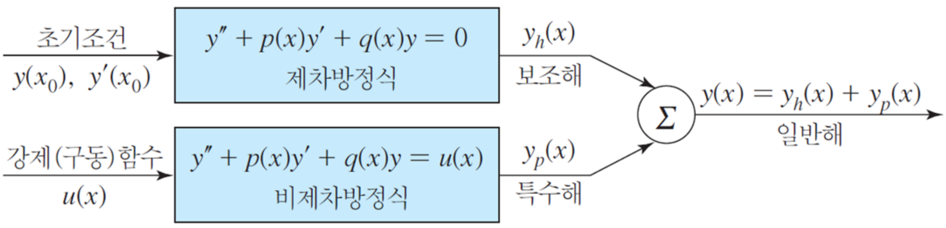
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = u(x)$$

<해법> ① $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$을 만족하는 보조해 $y_h(x)$를 구한다.

② $y'' + p(x)y' + q(x)y = u(x)$ 를 만족하는 특수해 $y_p(x)$를 구한다.

③ 보조해와 특수해를 합하여 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$를 구한다.

④ 초기 조건이 주어져 있다면 초기조건을 ③에 대입하여 미지의 상수를 결정한다.



[그림 2.5] 비제차 미분방정식의 일반해

2.5 미정계수법

특수해를 구하는 가장 일반적인 방법으로 외부에서 강제되는 함수 $u(x)$의 형태로부터 특수해를 유사한 형태로 가정하여 해를 구하는 방법
(선형인 경우만 적용 가능)

<예제> $y'' + 2y' = 3y = 3x^2$

강제함수 $u(x) = 3x^2$ (2차 다항 함수)

$\longrightarrow$ 특수해 $y_p(x) = k_1x^2 + k_2x + k_3$ (2차 다항 함수)로 가정!

k_1, k_2, k_3의 미정계수

$y_p(x)$를 미분하여 주어진 미분방정식에 대입하면

$$y_p' = 2k_1x + k_2,\quad y_p'' = 2k_1$$

$$\underbrace{3k_1}_{3}x^2 + \underbrace{(4k_1 + 3k_2)}_{0}x + \underbrace{(2k_1 + 2k_2 + 3k_3)}_{0} = 3x^2$$

$$\begin{cases} 3k_1 = 3 \\ 4k_1 + 3k_2 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore k_1 = 1,\quad k_2 = -\frac{4}{3},\quad k_3 = \frac{2}{9}$$

$$\therefore \text{ 특수해 } y_p(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{9}$$

< $u(x)$에 따른 $y_p(x)$의 형태 >

$u(x)$		$y_p(x)$의 형태
다항함수	K	A
	K_1x+K_0	A_1x+A_0
	$K_2x^2+K_1x+K_0$	$A_2x^2+A_1x+A_0$
삼각함수	$K\sin x$	$A\sin x+B\cos x$
	$K\cos x$	$A\sin x+B\cos x$
	$K_1\sin x+K_2\cos x$	$A\sin x+B\cos x$
지수함수	Ke^{ax}	Ae^{ax}
기본함수의 결합	Kxe^{ax}	$(A_1x+A_0)e^{ax}$
	Kx^2e^{ax}	$(A_2x^2+A_1x+A_0)e^{ax}$
	$Ke^{ax}\sin x$	$e^{ax}(A\sin x+B\cos x)$
	$Ke^{ax}\cos x$	$e^{ax}(A\sin x+B\cos x)$
	$Kx\sin x$	$(A_1x+A_0)\sin x+(B_1x+B_0)\cos x$
	$Kx\cos x$	$(A_1x+A_0)\sin x+(B_1x+B_0)\cos x$

<예제> $y''-3y'+2y=3e^{-4x}$

강제함수 $u(x)=3e^{-4x}$ $\longrightarrow$ 특수해 $y_p(x)=Ae^{-4x}$ 로 가정!

$$y_p'=-4Ae^{-4x},\ y_p''=16Ae^{-4x}$$

$$16Ae^{-4x}-3(-4Ae^{-4x})+2(Ae^{-4x})=3e^{-4x}$$

$$\therefore\ 30Ae^{-4x}=3e^{-4x} \longrightarrow \therefore\ A=\frac{1}{10}$$

특수해 $y_p(x)=\dfrac{1}{10}e^{-4x}$

<참고>

① $u(x)$ 가 다항함수 $\longrightarrow$ y_p 도 다항함수로 가정

② $u(x)$가 sine 또는 cosine 함수

$\longrightarrow$ y_p는 sine과 cosine의 합으로 가정

③ $u(x)$가 지수함수 $\longrightarrow$ y_p 도 크기가 다른 지수함수로 가정

④ $u(x)$가 기본함수의 결합 형태

$\longrightarrow$ 기본함수에 대한 y_p의 형태를 적절히 결합하여 가정

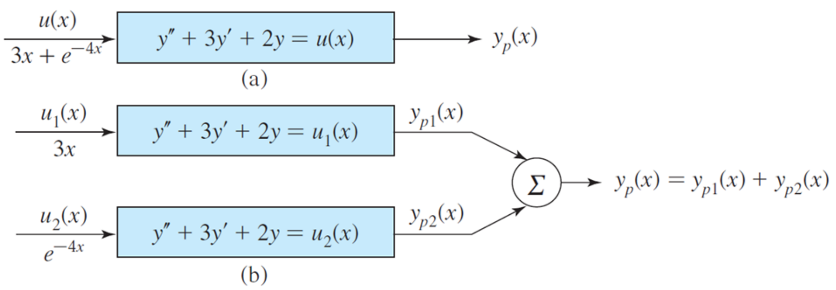
미정계수법에서의 중첩의 원리

강제함수 $u(x)=u_1(x)+u_2(x)$형태일 때 특수해 $y_p(x)$는 $u_1(x)$ 와 $u_2(x)$ 각각에 대한 특수해 $y_{p1}(x)$와 $y_{p2}(x)$의 합의 형태로 결정된다.

$$y_p(x)=y_{p1}(x)+y_{p2}(x)$$

<예제> $y''+3y'+2y=3x+e^{-4x}$

$$\left.\begin{aligned} u_1(x)=3x &\longrightarrow y_{p1}(x)=A_1x+A_0 \\ u_2(x)=e^{-4x} &\longrightarrow y_{p2}(x)=Ae^{-4x} \end{aligned}\right\} \text{특수해 } y_p(x)=(A_1x+A_0)+Ae^{-4x} \text{ 가정!}$$



[그림 2.6] $u(x)=u_1(x)+u_2(x)$인 경우 특수해

미정계수법에서의 곱의 원리

가정한 특수해의 형태가 주어진 미분방정식의 보조해와 중복이 되는 경우는 특수해에 대한 가정을 독립변수 x를 곱함으로써 수정해야 한다. 수정하여 가정한 특수해가 또 다시 보조해와 중복된다면 중복되지 않을 때까지 x를 곱하여 특수해의 가정을 수정한다.

<예제> $y''+4y'+4y=3e^{-2x}$

특성방정식 $\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0 \quad \therefore \lambda_1=\lambda_2=-2$

보조해 $y_h(x)=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$

강제함수 $u(x)=3e^{-2x} \longrightarrow$ 특수해 $y_p=Ke^{-2x}$

$\xrightarrow{\text{수정}}$ 수정된 특수해 $y_p=Kxe^{-2x}$ (보조해와 중복)

$\xrightarrow{\text{수정}}$ 수정된 특수해 $y_p(x)=Kx^2e^{-2x}$ (또 다시 보조해와 중복)

$\therefore$ 수정된 특수해 $y_p(x)=Kx^2e^{-2x}$

<미정계수법에서의 중요 원리>

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = u(x)$$

선형 2차 비제차 미분방정식

규칙	$u(x)$의 형태	$y_p(x)$의 형태
중첩의 원리	$u(x)$가 기본함수들의 합 $u(x) = \sum_k u_k(x)$	$y_p(x)$는 각 $u_k(x)$의 형태에 대응되는 특수해의 $y_{pk}(x)$의 합으로 가정 $y_p(x) = \sum_k y_{pk}(x)$
곱의 원리	$u(x)$가 보조해와 일부 또는 전부 중복	먼저 $u(x)$에 대응되는 특수해의 형태를 가정한 후 보조해와 중복되지 않을 때까지 x를 곱하여 $y_p(x)$를 수정하여 가정

2.6 매개변수변환법

특수해를 구하기 위한 또 다른 방법 ⟶ 차수감소법의 개념을 확장 ($u(x)$ 형태가 복잡한 경우 적용 가능)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = u(x)$$

보조해 $y_h(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

특수해의 가정 $y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ $v_1(x)$, $v_2(x)$ 미지의 함수

$y_p(x)$가 특수해가 되도록 미지의 함수 $v_1(x)$, $v_2(x)$를 결정!

$$y_p' = v_1'y_1 + v_1y_1' + v_2'y_2 + v_2y_2'$$

[조건 1] $\underline{v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0}$ ⟶ $y_p'(x) = v_1y_1' + v_2y_2'$

$$y_p''(x) = (v_1'y_1' + v_1y_1'') + (v_2'y_2' + v_2y_2'')$$

y_p, y_p', y_p'' 을 미분방정식에 대입하여 v_1과 v_2에 대해 정리!

$$\longrightarrow v_1\underbrace{(y_1'' + py_1' + qy_1)}_{0} + v_2\underbrace{(y_2'' + py_2' + qy_2)}_{0} + v_1'y_1' + v_2'y_2' = u$$

[조건 2] $v_1'y_1' + v_2'y_2' = u$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix}$$

↓ Cramer 공식

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ u & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 u}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = -\frac{y_2 u}{W} \qquad v_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 u}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = \frac{y_1 u}{W}$$

$W(y_1, y_2) \triangleq y_1 y_2' - y_2 y_1'$; y_1과 y_2의 Wronskian이라 부른다.

$$\therefore \quad v_1 = -\int \frac{y_2 u}{W}\,dx, \quad v_2 = \int \frac{y_1 u}{W}\,dx$$

$\therefore$ 특수해 $y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 u}{W}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 u}{W}\,dx$

<예제> $y'' - 4y = 4e^{-x}$

특성방정식 $\lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2$

보조해 $y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$ $\quad \therefore\ y_1(x) = e^{2x},\ \ y_2(x) = e^{-2x}$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$$

$$v_1 = -\int \frac{y_2 u}{W}\,dx = \frac{1}{4}\int e^{-2x}(4e^{-x})\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

$$v_2 = \int \frac{y_1 u}{W}\,dx = -\frac{1}{4}\int e^{2x}(4e^{-x})\,dx = -e^{x}$$

특수해 $y_p(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 = -\frac{1}{3}e^{-3x}e^{2x} - e^{x}\cdot e^{-2x}$

$$\therefore\ y_p(x) = -\frac{4}{3}e^{-x}$$

2.7 초기치 문제

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = u(x)$$
$$y(x_0) = K_0,\quad y'(x_0) = K_1$$

<해법> ① 보조해 $y_h(x)$를 구한다.

② 특수해 $y_p(x)$를 구한다.

③ 일반해 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$를 구한다.

④ 주어진 초기조건을 $y(x)$에 대입하여 미지의 상수를 결정한다.

<예제> $y'' + 4y = \sin 3x,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = \frac{2}{5}$

① 특성방정식 $\lambda^2 + 4 = (\lambda + 2i)(\lambda - 2i) = 0 \quad \lambda_1 = 2i,\ \lambda_2 = -2i$

보조해 $y_h(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

② 특수해의 가정 $y_p(x) = A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x$

$$y_p' = -3A_1 \sin 3x + 3A_2 \cos 3x$$
$$y_p'' = -9A_1 \cos 3x - 9A_2 \sin 3x$$

$$y_p'' + 4y_p = (-9A_1 \cos 3x - 9A_2 \sin 3x) + 4(A_1 \cos 3x + A_2 \sin 3x) = \sin 3x$$
$$-5A_1 \cos 3x - 5A_2 \sin 3x = \sin 3x$$
$$5A_1 = 0,\ 5A_2 = -1 \quad \longrightarrow \quad A_1 = 0,\ A_2 = -\frac{1}{5}$$
$$\therefore \quad y_p(x) = -\frac{1}{5}\sin 3x$$

③ 일반해 $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x$

④ 초기조건의 대입

$$y(0) = c_1 = 1$$
$$y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x - \frac{3}{5}\cos 3x$$
$$y'(0) = 2c_2 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \quad 2c_2 = 1 \quad \therefore c_2 = \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ y(x) = \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x$$

<2장 끝>